

27

Теорема Лере-Шаудера и три теоремы, как следствие из теоремы Шаудера

① ∇ X -банах. пр-во, $A: \bar{B}(0, R) \rightarrow X$, ур-е $A(x) = \gamma x$ не имеет реш-я $\forall x: \|x\| = R$, $\forall \gamma > 1$, ∇A -вполне непр. (как нелин).
 Тогда $\exists x \in \bar{B}(0, R): A(x) = x$
 Определим отображ-е $\tilde{A}(x) = \begin{cases} A(x), & \text{if } \|A(x)\| \leq R, \\ \frac{A(x)}{\|A(x)\|} R, & \text{if } \|A(x)\| > R. \end{cases}$

$\tilde{A}$ -м непр-ть. Возьмем $x_n \rightarrow x$, $x_n \in \bar{B}(0, R)$. If $\|A(x)\| > R$, то при достаточном n : $\tilde{A}(x_n) = \frac{A(x_n)}{\|A(x_n)\|} R \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{A(x)}{\|A(x)\|} R$ в силу непр-ти A .

При $\|A(x)\| \leq R \Rightarrow \tilde{A}(x) = A(x)$ - непр $\Rightarrow \tilde{A}$ - непр.

$\tilde{A}$ -м компакт-ть. Возьмем $\|x_n\| \leq R \Rightarrow$ можно ли выбрать одну н/послед-ть из $y_n = \tilde{A}(x_n)$

$\nabla \exists \infty$ чисел $x_n: \|A(x_n)\| > R \Rightarrow \|A(x_{n_k})\| > R \Rightarrow \tilde{A}(x_{n_k}) = \frac{A(x_{n_k})}{\|A(x_{n_k})\|} R$, и в силу комп-ти A можно выбрать одну н/послед-ть.

∇ , наоборот: $\|A(x_{n_k})\| \leq R \Rightarrow \tilde{A}(x_{n_k}) = A(x_{n_k}) \Rightarrow$ очевидно тоже можно $\Rightarrow \tilde{A}$ - компакт.

$\tilde{A}$ непр и компакт $\Rightarrow \tilde{A}$ вполне непр.

По отр-нию (построению) $\Rightarrow \tilde{A}: \bar{B}(0, R) \rightarrow \bar{B}(0, R) \Rightarrow$ [Шаудера]
 $\Rightarrow \exists x \in \bar{B}(0, R): \tilde{A}(x) = x$

If $\|A(x)\| \leq R \Rightarrow \tilde{A}(x) = A(x) = 0 = x \Rightarrow$ есть неподвиж. т.

If $\|A(x)\| > R \Rightarrow \tilde{A}(x) = \frac{A(x)}{\|A(x)\|} R = x \Rightarrow A(x) = \frac{\|A(x)\|}{R} x$, $\gamma = \frac{\|A(x)\|}{R} > 1$

(т.к. $\|A(x)\| > R$)

Проверим $\|x\|$: $\|x\| = \frac{\|A(x)\|}{\|A(x)\|} R = R \Rightarrow$ по усл. ∇ такого x не мо $\Rightarrow$ случай $\|x\| = R$ и $\gamma > 1$ отрадет $\Rightarrow$ по этому случаю $\exists$ неподвиж. т. ■

② ∇ (об остром $\angle$) $\nabla A: \bar{B}(0, R) \rightarrow X$ -банах, A -вполне непр. (как нелин), $\|A(x)\| \leq \|x\|$, $\forall x: \|x\| = R$. Тогда $\exists x \in \bar{B}(0, R): x = A(x)$
 Нужно показать, что ур-е $Ax \neq \gamma x$ не имеет реш-я при $\|x\| = R$ и $\gamma > 1$. ∇ такое реш-е $\exists \Rightarrow \|A(x)\| \cdot \frac{1}{\gamma} = \gamma > 1$, $\|x\| = R \Rightarrow \|A(x)\| > \|x\|$
 $\Rightarrow$ (!?) $\Rightarrow$ реш-я нет $\Rightarrow$ [пред. ∇] $\Rightarrow \exists$ неподвиж. т. ■

(Лере-Шаудера) $\nabla A: X \rightarrow X$ -банах, A -вполне непр. (как нелин) и $\nabla \exists c > 0$: (все реш-я ур-я $\tilde{A}(x) = x$, $\forall x \in (0, 1)$, удовл. усл-ке $\|x\| \leq c$. Тогда $\exists$ неподвиж. т. $x \in X: x = A(x)$

▲ Вокруг $0 \in \overline{B}(0, R)$ $R = C+1$.

$\exists \varphi(x) = x \Rightarrow \varphi(x) = \frac{1}{\gamma} x, \|x\| = R, \|x\| \leq C \Rightarrow$ нет радиуса γ упр-а: $\|x\| = R$.

$\Rightarrow \exists \text{ для } \forall \varepsilon \Rightarrow \exists \text{ неподвиж. т. } x \in \overline{B}(0, R) : \varphi(x) = x$ ■

③ $\exists \varphi(x) : X \rightarrow X$ — дамах, $\varphi(x)$ — вполне контр. (как велик) и $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \|\varphi(x)\| \cdot \frac{1}{\|x\|} = q < 1$. Тогда $\exists$ неподвиж. т. $x \in X : x = \varphi(x)$

▲ If $\|x\|$ дост. велика, то $\frac{\|\varphi(x)\|}{\|x\|} \leq q + \varepsilon$ и $\exists q + \varepsilon < 1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \|\varphi(x)\| \leq (q + \varepsilon) \|x\| \leq \|x\|$, if $\|x\| = R$, ε достаточно велик $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \exists \text{ для } \forall \varepsilon \Rightarrow \exists x \in \overline{B}(0, R) : \varphi(x) = x$ ■